носки, так как они неразличимы можно надеть на оставшиеся места 1 способом => 3 способа на правой ноге
Итого $1 \cdot 3 = 3$ способа.

2 случай) 1 серый носок и 2 синих можно расположить 3-мя способами аналогично => на левой ноге 3 способа; на правой: 1 белый; 1 серый; 1 синий сначала мы можем надеть 3 из 3-х потом 1 из 2х; затем последний => итого $3!$ способов, $3! = 6$
=> Итого $3 \cdot 6 = 18$ способов.

3-ий случай) Обеих 2 серых 1 синий можем надеть 3-мя способами аналогично; на левой ноге 3 способа на правой: тоже 3 аналогично
=> итого $3 \cdot 3 = 9$ способов.

4-ый случай) аналогично 3-ему случаю; $3 \cdot 3 = 9$ вариантов

5-ый случай) аналогично 2-ому => $3 \cdot 6 = 18$ вариантов.

6-ой случай) аналогично 1-ому => $1 \cdot 3 = 3$ способа.

Итого: $3 + 18 + 9 + 9 + 18 + 3 = 60$ вариантов.

С вывороченными в каждом варианте мы можем один из шести носков надеть 2-мя способами: мизинец сторонней и наизнанку => 1-ый носок 2-мя способами, 2-ой носок 2-мя способами, ..., 6-ой носок 2-мя способами =>

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ (в 1 случае 64 варианта)

Итого $60 \cdot 64 = 3840$ способов

Ответ: 3840 способов.

№2. $(3 + \sqrt{11})^{75}$ Пусть $A = (3+\sqrt{11})^{75}$; $B = (3-\sqrt{11})^{75} = -(\sqrt{11}-3)^{75}$

Тогда докажу, что A имеет вид $m + n\sqrt{7}$ и $B = m - n\sqrt{7}$ (1)

где m и $n \in \mathbb{N}$

Обозначим $C = a + b\sqrt{11}$; тогда $\overline{C} = a - b\sqrt{11}$ - сопряженное число.

$\Rightarrow D = C + d \cdot \sqrt{11}$, где c и $d \in \mathbb{N}$ где a и $b \in \mathbb{N}$

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

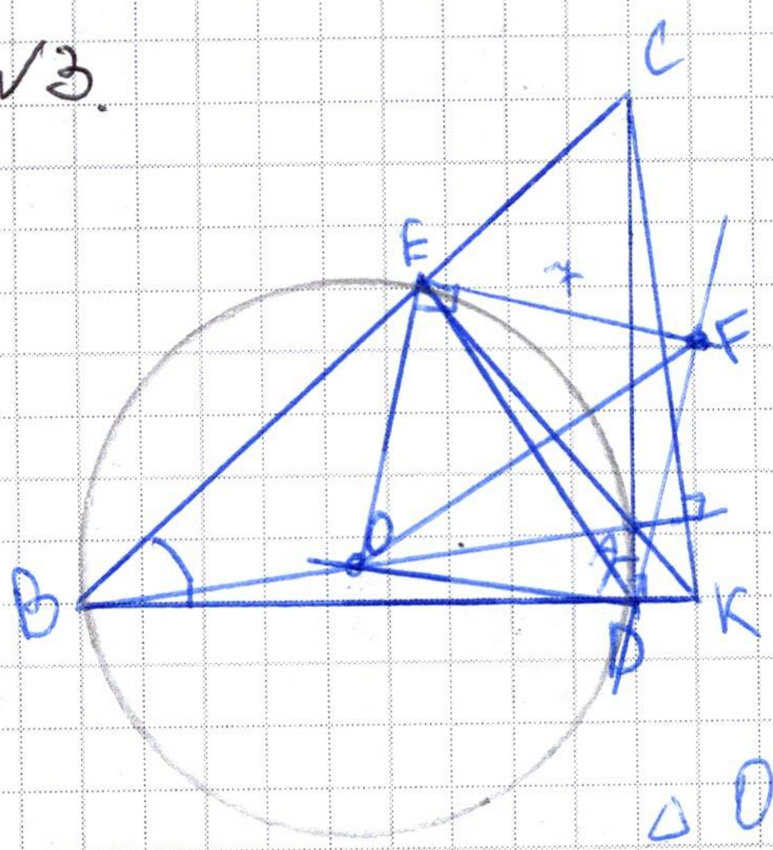
Вариант задания 2

№1. Сначала посчитаем кол-во способов не учитывая порядок надевания и не учитывая выворачивания.
Сделаем перебор. Сначала одну тройку на левую ногу, а оставшиеся на правую
(x; y; z) где x - кол-во белых носков
y - кол-во серых носков
z - кол-во синих носков

Случай	На левой ноге	На правой
1 случай	(0; 0; 3)	(1; 2; 0)
2 случай	(0; 1; 2)	(1; 1; 1)
3 случай	(0; 2; 1)	(1; 0; 2)
4 случай	(1; 0; 2)	(0; 2; 1)
5 случай	(1; 1; 1)	(0; 1; 2)
6 случай	(1; 2; 0)	(0; 0; 3)

С учетом порядка надевания, но без выворачиваний.
1 случай 3 синих носка можно расположить 1 способом, так как они не различимые ;-) на левой ноге 1 способ, на правой ноге белый носок можно надеть 1-ым, 2-ым или 3-им => 3 способа, а серые

№3.



Пусть $\angle CBD = \alpha$; тогда $\angle EOD = 2\alpha$; так как $\angle EOD$ - центральный; O - центр окружности, середина AD.

$r = OB = OE = OA = OD$.

$FE = FD = 7$ (т.к. касательные)

$\triangle OEF = \triangle FOD$ по 2-м катетам $\Rightarrow \angle EOF = \angle DOF = \alpha$

$\Rightarrow OE$ $r = OE = \sqrt{OF^2 - FE^2}$

$\angle OEF$ $\sin\alpha = \frac{EF}{OF} \Rightarrow OF = \frac{EF}{\sin\alpha} = \frac{7}{\frac{7}{10}} = 10$ (разделить)

$\Rightarrow r = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$

$BA \perp CK$ (подл); $AE \perp BC$ (т.к. двойственность медиан) и $CD \perp BK$ (т.к. опущ. на диам.)

$\Rightarrow$ A - точка пересечения высот $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAE$ - одна прямая. $\Rightarrow \angle KEC = \angle CDK = 90° \Rightarrow$ $\square ECKD$ - вписан-

ный $\Rightarrow \angle BED = 180° - \angle CED = \angle CKD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BED \sim \triangle BCK$ ($\angle B$ - общий; $\angle BED = \angle BKC$).

Пусть R - радиус описанной окружности около $\triangle$-ка BCK;

тогда r - радиус описанной окружности около $\triangle$-ка BED

Отношение радиусов равно коэффициенту подобия $\Rightarrow$

$\frac{r}{R} = \frac{BD}{BC} = \cos\alpha$

$\Rightarrow R = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{51} \cdot 10}{\sqrt{51}} = 10$

$\frac{BD}{BC} = \cos\alpha$ из $\triangle$-ка BCD.

т.к. $\sin\alpha = 0{,}7$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{51}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

Ответ: 10.

Докажу, что $\overline{C \cdot D} = \overline{C} \cdot \overline{D}$ (2)

$C \cdot D = (a + b\sqrt{11})(c + d\sqrt{11}) = ac + bd \cdot 11 + \sqrt{11}(bc + da) \Rightarrow$ в (1) доказано, что $\overline{A}$ имеет вид $m + n\sqrt{11}$ (75 раз умножаем), где $m, n \in \mathbb{N}$

$\overline{C \cdot D} = ac + bd - \sqrt{11}(bc + da)$

$\overline{C} \cdot \overline{D} = (a - b\sqrt{11})(c - d\sqrt{11}) = ac + bd \cdot 11 - bc\sqrt{11} - da\sqrt{11} = ac + bd - \sqrt{11}(bc + da)$

$= \overline{C \cdot D} \Rightarrow$ (2) - доказано (где $a, b, c, d \in \mathbb{N}$)

$\overline{A} = (3 + \sqrt{11})^{75} = \overline{(3 + \sqrt{11})^{75}} = (3 - \sqrt{11})^{75} = B \Rightarrow B$ имеет вид $m - n\sqrt{11}$ (75 раз умножаем)

$A + B = m + n\sqrt{11} + m - n\sqrt{11} = 2m \in \mathbb{N}$

$3 = \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \Rightarrow 3 - \sqrt{11} < 0$, а $\sqrt{11} - 3 > 0$.

$B = (3 - \sqrt{11})^{75} = -(\sqrt{11} - 3)^{75}$, чтобы $F = -B = (\sqrt{11} - 3)^{75}$.

тогда $A = 2m + F$, где $F > 0$,

$0 < \sqrt{11} - 3 = \frac{(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)}{\sqrt{11} + 3} = \frac{11 - 9}{\sqrt{11} + 3} < \frac{2}{\sqrt{9} + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \sqrt{11} - 3 < \frac{1}{3}$.

$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} < \frac{1}{100} \Rightarrow (\sqrt{11} - 3)^5 < \frac{1}{100}$

$(\sqrt{11} - 3)^{75} = ((\sqrt{11} - 3)^5)^{15} < \left(\frac{1}{10^2}\right)^{15} \Rightarrow (\sqrt{11} - 3)^{75} < \frac{1}{10^{30}}$

$\Rightarrow$ у F минимум 30 нулей после запятой.

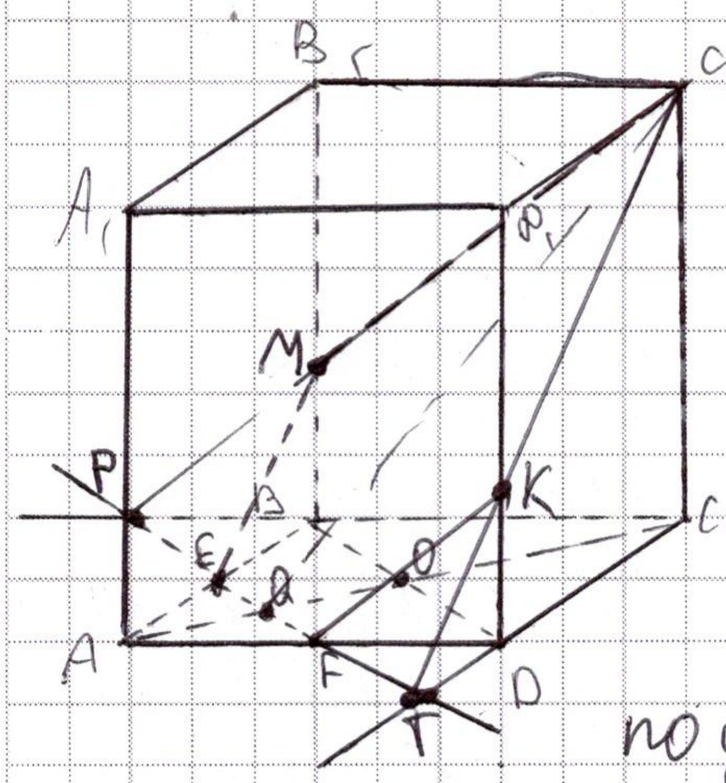
Т.к. $A = 2m + F$, где $2m \in \mathbb{N}$, то у A тоже 30 нулей после запятой минимум $\Rightarrow$ 30-ая цифра: 0.

Ответ: 0.

3-й случай. Пусть φ - угол данный, между сечением и $ABCD$

$EF \parallel BD$

$EF \cap AC = Q \quad BD \cap AC = O$



Выполним построение сечения

1) $EF \cap BC = T$; $TC_1 \cap DD_1 = K$

2) $EF \cap BC = P$; $PC_1 \cap BB_1 = M$.

EMC_1KF - данное сечение.

по усл. $\frac{S_{сеч}}{S_{ABCD}} = \frac{221}{90}$

$\frac{1}{\cos^2\varphi} = tg^2\varphi + 1 \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{tg^2\varphi + 1} \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{\frac{144}{25} + \frac{25}{25}}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{5}{13}$,

$\frac{S_{проекц}}{S_{сеч}} = \cos\varphi \Rightarrow S_{сеч} = \frac{S_{проекц}}{\cos\varphi}$

$\Rightarrow \frac{S_{проекц}}{S_{сеч}} = \frac{221}{90} \Rightarrow \frac{S_{проекц}}{\cos\varphi \cdot S_{ABCD}} = \frac{221 \cdot 5}{90 \cdot 13} = \frac{17}{18}$.

$\Rightarrow \frac{S_{EAF}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{18}$.

$\triangle EAF \sim \triangle ABD$

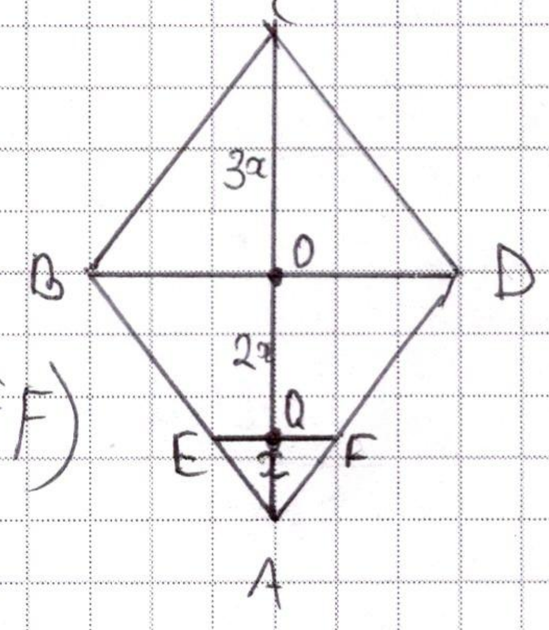
по 2 углам; $\angle A$ - общий

$\angle DBA = \angle EA$ (т.к. $BD \parallel EF$)

$S_{ABCD} = 2 S_{ABD}$

$\Rightarrow \frac{S_{EAF}}{2 S_{ABD}} = \left(\frac{AE}{BA}\right)^2 \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{S_{EAF}}{S_{ABD}} = \frac{1}{9}$

$\frac{S_{EAF}}{S_{ABD}} = \left(\frac{AE}{BA}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{AE}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Значит, AE по 1 грани



$\frac{AQ}{QO} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}$, пусть $AQ = x$, тогда $AC = 6x$; $QC = 5x$.

$\angle\varphi = \angle CQC_1$ (т.к. $C_1C \perp (ABC)$; $AC \perp BD$, $BD \parallel EF$ ← т.к. $AC \perp EF$; то по т.т.о $\perp$ $QC_1 \perp EF$ (теорема о трех перпендикулярах))

$tg\angle\varphi = \frac{C_1C}{QC} \Rightarrow C_1C = QC \cdot tg\varphi = 5x \cdot \frac{12}{5} = 12x$

Из $\triangle AC_1C$ $tg\angle C_1AC = \frac{C_1C}{AC} = \frac{12x}{6x} = 2. \Rightarrow \angle C_1AC = arctg\,2.$

Ответ: $\angle C_1AC = arctg\,2$.

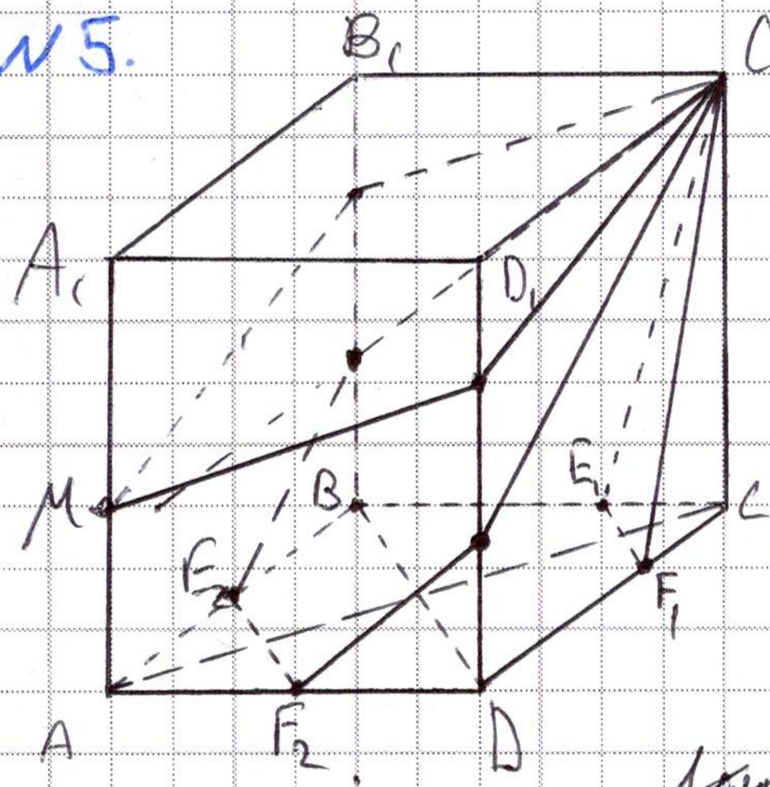
olymp.bmstu.ru

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

№5.



Пусть α - это плоскость сечения.

Есть 3 способа расположить α

1 случай. $\alpha \cap (ABC) = E_1F_1$; $E_1 \in BC$; $F_1 \in DC$

2 случай $\alpha \cap (ABC) = E_2F_2$; $E_2 \in BA$; $F_2 \in AD$

3 случай $\alpha \perp (ABC)$; $\alpha \cap AA_1 = M$

~~1 случай~~ $\frac{S_{проекц}}{S_{сеч}} = \cos\varphi$

φ - ~~угол~~ данный угол между α и $(ABCD)$ $tg\,\varphi = \frac{12}{5}$

$\frac{1}{\cos^2\varphi} = tg^2\varphi + 1 \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{tg^2\varphi + 1} = \frac{1}{\frac{144}{25} + \frac{25}{25}} = \frac{25}{169}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{5}{13}$.

1 сл.) $\frac{S_{сеч}}{S_{ABCD}} = \frac{221}{90}$ и $\frac{S_{проекц}}{S_{сеч}} = \cos\varphi \Rightarrow S_{проекц} = S_{сеч}$

$\frac{S_{проекц}}{S_{ABCD}\cdot\cos\varphi} = \frac{221}{90} \Rightarrow \frac{S_{проекц}}{S_{ABCD}} = \frac{221}{90} \cdot \frac{5}{13} = \frac{17}{18}$.

по рисунку видно, что $S_{E_1F_1C} < S_{BDC} \Rightarrow$

$\frac{S_{E_1F_1C}}{2S_{BDC}} = \frac{17}{18} \Rightarrow S_{E_1F_1C} < \frac{S_{BDC}}{2S_{BDC}} > \frac{17}{18} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{17}{18}$ - противоречие такой сл. невозможен.

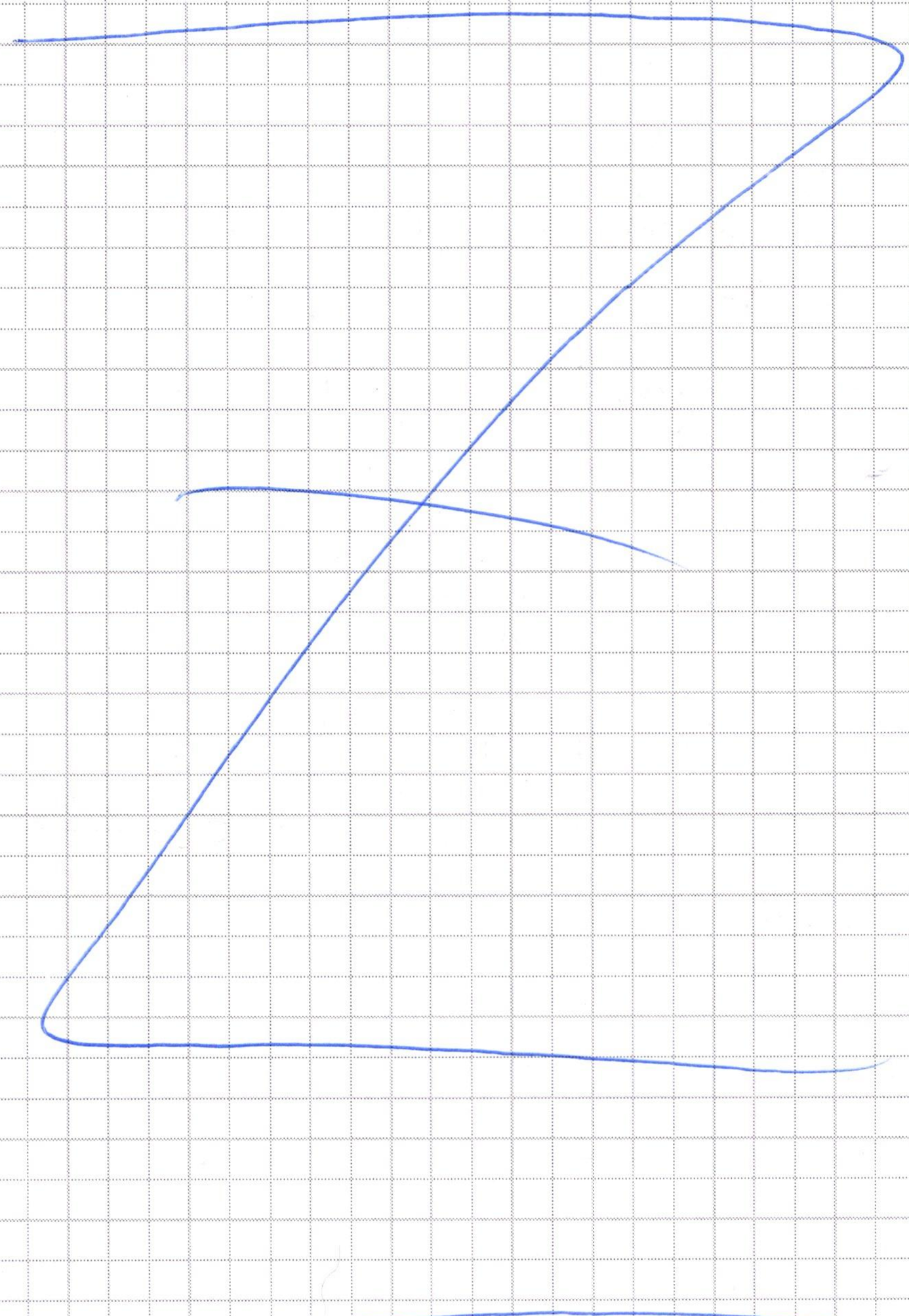
2 случай. $\frac{S_{сеч}}{S_{ABCD}} = \frac{221}{90}$ (когда) и $\frac{S_{проекц}}{S_{сеч}} = \frac{5}{13}$ $(\cos\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (по рисунку) $\frac{S_{ABCD}}{S_{сеч}} = \frac{5}{13} \Rightarrow \frac{221}{90} = \frac{13}{5} \Rightarrow 17 = 18$ - противор.

$\Rightarrow$ невозможно.

Остается 3-ий случай; когда сечение является пятиугольник.

Можно использовать оборот листа для записи решений

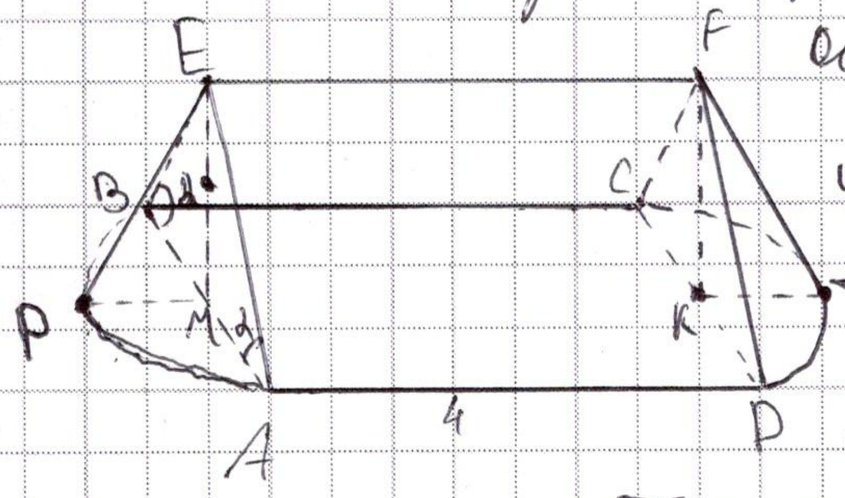


Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 2

№6. Проведем Найдем максимальный объем ~~состоит~~ состоит из прямой призмы ABCDFE, находящейся на „боку", основания которой △-ки BEA и △CFD.



и два полуконуса с осями EM и FK.

и радиусами равными 2 (AB:2=4:2=2)

плоскости призмы наклонены к ABCD

под углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$; ~~и конус наклонен к ABE~~.

AD = 4 (по усл.) BM = AM = 2 (т.к. M - середина AB.)

Т.к. BM = 2 и $\angle \alpha = 45°$ ($\angle ABE = \frac{\pi}{4}$); то BM = EM = AM = 2;

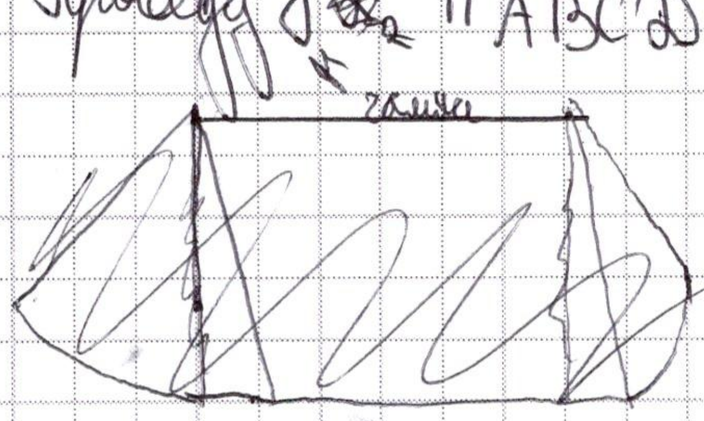
$\Rightarrow V_{призмы} = \frac{1}{2} S \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 16$

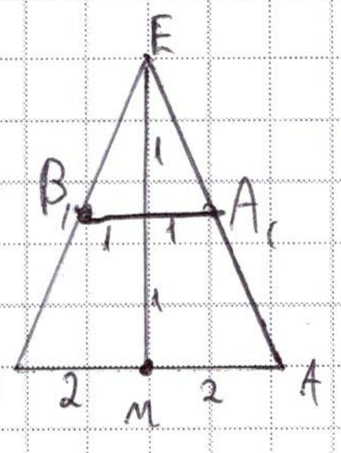
$V_{конусов} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot EM = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{3,14}{3} \cdot 8 = \frac{25,12}{3} \approx 8,37... \approx 8,4$

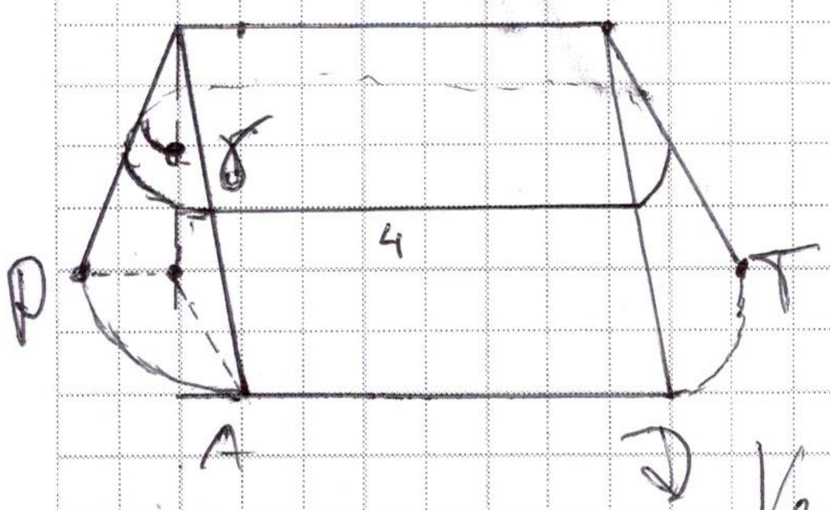
$\Rightarrow V_{ф} = 16 + 8,4 = 24,4$

Поделим EM на 2 равных части $EO = OM = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Проведу $\gamma \parallel ABCD$







$\Rightarrow V_{бс} = V_{бп} + V_{бк} \Rightarrow V_{бс} = S \cdot h + \frac{1}{3} S h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h =$

$= 4 + \frac{3,14}{3} \cdot 1 \approx 4 + 1 = 5$

$\Rightarrow V_{верхнего\ слоя} = 5$; $V_{нижнего} = 24,4 - 5 = 19,4$.

$V_{воды} = 5 \cdot 0,4 + 19,4 \cdot 0,8 = 2 + \frac{194}{40} \cdot \frac{42}{5} = \frac{388}{25} = \frac{388 \cdot 4}{100} =$

$= 15\,52 \approx$

$\approx 15,5$.

Ответ: 15,52 = $V_{воды}$; ~~1024,4 - $V_{масла}$~~

Можно использовать оборот листа для записи решений